Теория пределов

Числовая последовательность

Определение

Числовой последовательностью $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ называется функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел $n \in N$

x_n -общий или n-ый член числовой последовательности

Пример числовой последовательности

$$\{\frac{(-1)^n}{n^2}\} = \{-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ..., \frac{(-1)^n}{n^2}, ...\}$$

Предел числовой последовательности

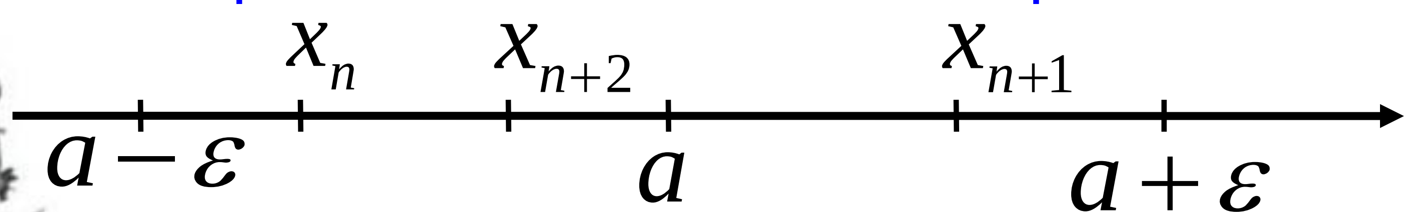
Определение

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N):(\forall n>n_0)\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$

В этом случае записывают, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n\to a$ при $n\to\infty$

Последовательность, имеющая предел называется сходящейся, в противном случае расходящейся

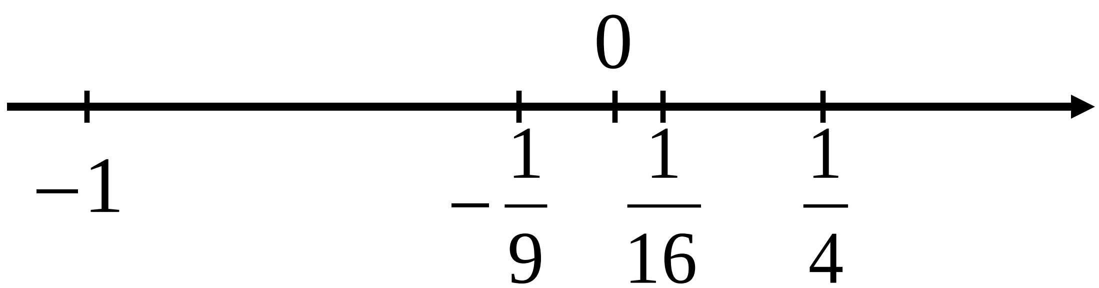
Геометрический смысл определения



$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\varepsilon$ - окрестность точки a; $n\to\infty\Rightarrow x_n\to a$

Примеры

1. $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0} \quad \left(\frac{(-1)^n}{n^2}\to 0,\ \frac{(-1)^n}{n^2}\neq 0\right)$$



2. $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}}=\frac{2+0}{4-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$$

Функции действительного аргумента

Пусть X и Y – некоторые непустые множества

Определение

Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие один и только один элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция y=f(x), то есть

$$f : X \to Y$$

Множество X – область определения функции

Y – множество значений функции

Если элементы множеств X и Y являются действительными числами, то функция f называется числовой или функцией действительного аргумента

Функции действительного аргумента

Основными элементарными функциями являются:

степенная функция

$$y = x^{\alpha}, \alpha \in R$$

показательная функция

$$y = a^{x}, a > 0, a \neq 1$$

логарифмическая функция

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

тригонометрические функции

$$y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$$

обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$$

Способы задания функции:

аналитический, табличный, графический, словесный

Предел функции

Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0

Определение

Число А называется пределом функции в точке x_0 или при $x \to x_0$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)$$

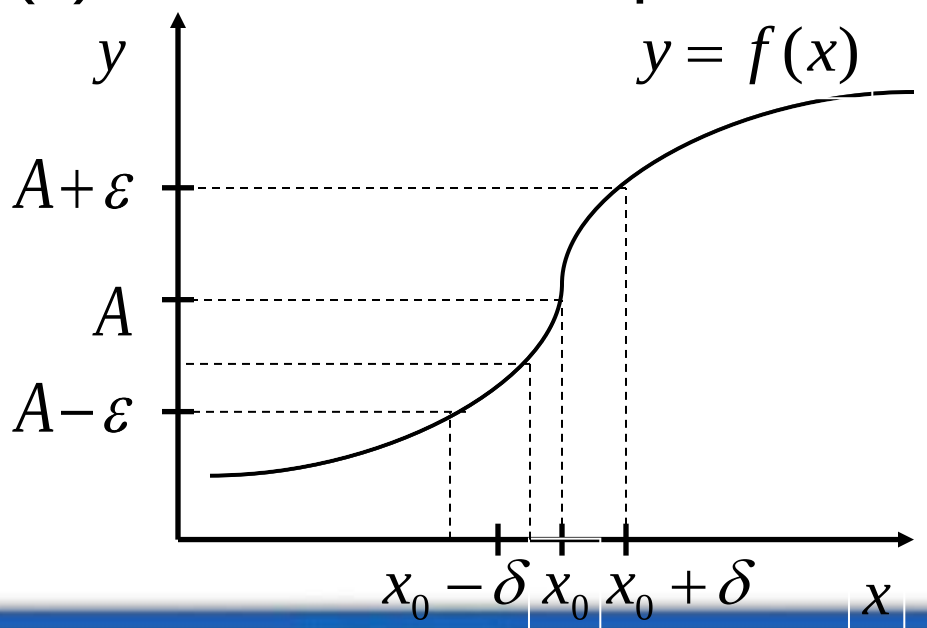
будет выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon$

В этом случае записывают, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Предел функции

Геометрический смысл определения

Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означает, что если для любой ε - окрестности точки А найдется такая δ - окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ - окрестности соответствующие значения функции f(x) лежат в ε - окрестности точки А



Предел функции

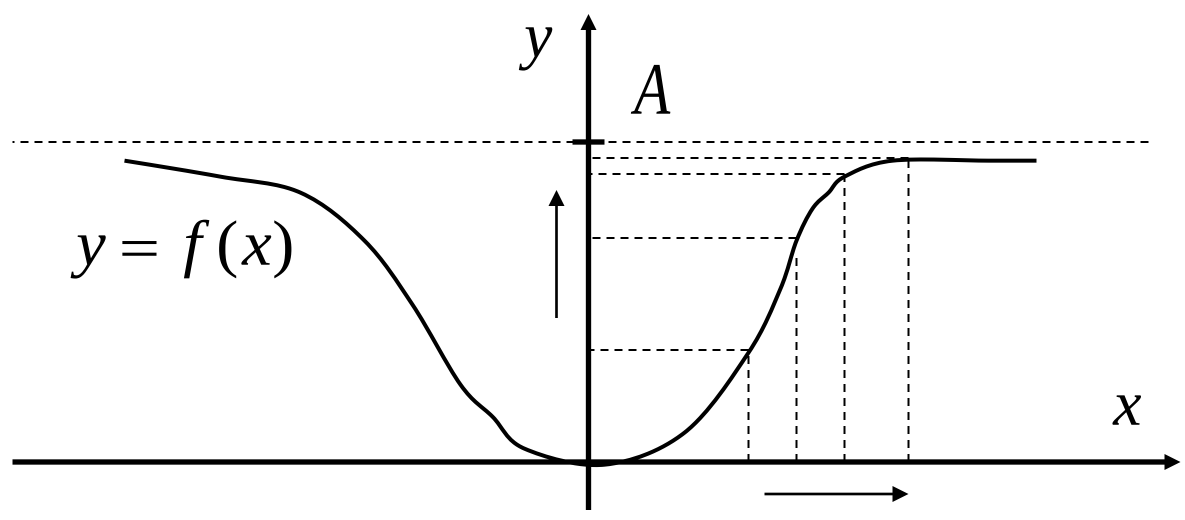
Пусть функция y=f(x) определена на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$.

Определение

Число А называется пределом функции при $x \to \infty$,если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M = M(\varepsilon) > 0)(\forall x : |x| > M) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

В этом случае записывают, что $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

Односторонние пределы

Односторонние пределы вводят в рассмотрение, когда важен способ приближения x к x_0

Предел функции слева

Число A_1 называется пределом функции y=f(x) в точке x_0 слева $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) : (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)) \Rightarrow \left| f(x) - A_1 \right| < \varepsilon$$

Предел функции справа

Число A_2 называется пределом функции y=f(x) в точке x_0 справа $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_1$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) : (\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)) \Rightarrow \left| f(x) - A_2 \right| < \varepsilon$$

Односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A \\ \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A \end{array}$$

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$$

$$\exists \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$$

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$$

не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

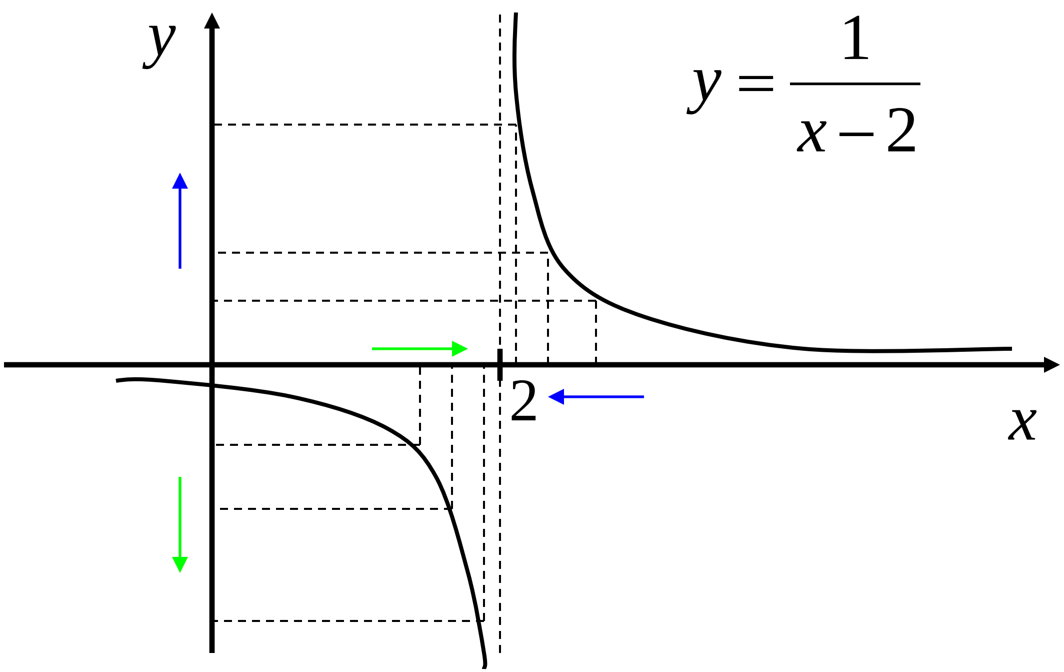
Бесконечно большие функции

Определение

Функция y=f(x) называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если

$$(\forall M > 0)(\exists \delta = \delta(M) > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x)| > M$$

В этом случае записывают, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.



$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\exists \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$$

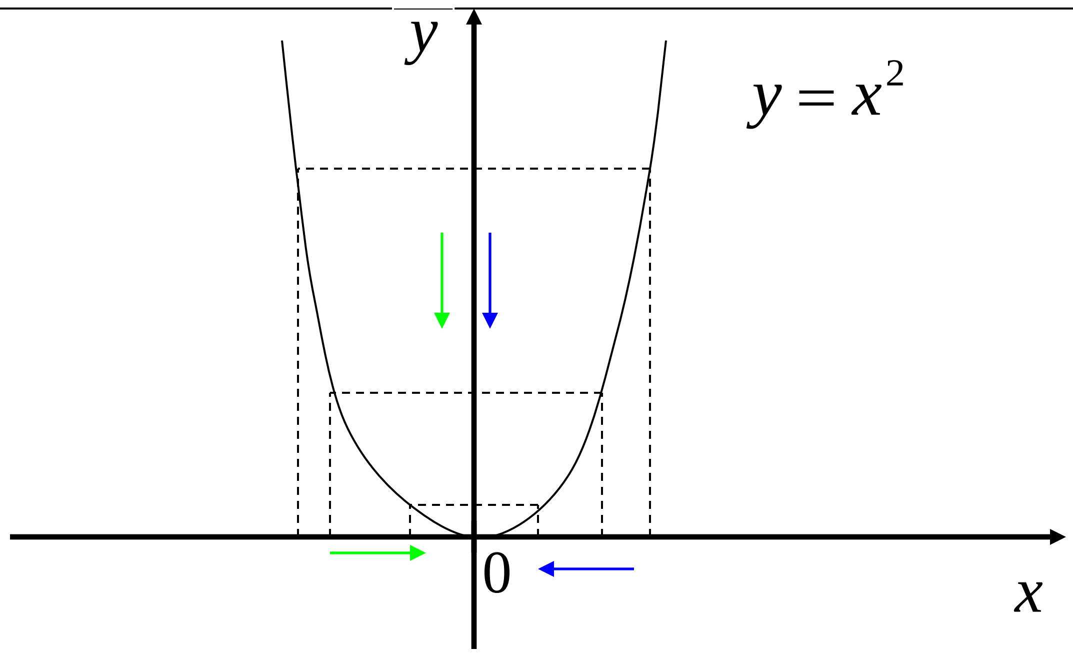
Бесконечно малые функции

Определение

Функция y=f(x) называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

В этом случае записывают, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.



$$\lim_{x \to 0+0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0-0} x^2 = 0$$

$$\exists \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

Свойства бесконечно малых функций

$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x),..$ - бесконечно малые функции

1

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$
$$\lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}(\alpha(x)+\beta(x)) = 0$$

2

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}(\alpha(x)\cdot\beta(x)) = 0$$

$\beta(x)$- ограниченная функция

3

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0$$

Основные теоремы о пределах

Пусть f(x) и g(x) – функции, для которых существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

Аналогично при $x \to \infty$

Теорема 1

Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Следствие

Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$

Основные теоремы о пределах

Теорема 2

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема 3

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)/\lim_{x\to x_0} g(x)$$

Следствие

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n,\quad n\in N$

Основные теоремы о пределах

Примеры

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=$$

$$=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Признаки существования пределов

Теорема 1 о пределе промежуточной функции

Если функция f(x) заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и g(x), стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) \le f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$$

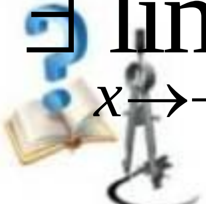
Признаки существования пределов

Теорема 2

о пределе монотонной функции

Всякая монотонно возрастающая или монотонно убывающая и ограниченная функция имеет предел при $x \to \infty$

$$\exists \lim_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}, \quad \exists \lim_{x \to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$$



Эта теорема справедлива и для последовательности

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{3x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=$$

$$=3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$$

Замечательные пределы

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = (1^{\infty}) = \lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2} =$$

$$= \left(\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2} = e^{2}$$

Основные теоремы о пределах

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{10}}{x^{2}}=(\dfrac{0}{0})=\lim\limits_{x\to 0}x^{8}=0\Rightarrow$

x^{10}-бесконечно малая более высокого порядка малости, чем x^{2}

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=(\dfrac{0}{0})=1\Rightarrow\sin x\sim$ x при $x\to 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=(\dfrac{0}{0})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x\cdot x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1\Rightarrow tgx\sim$ x при $x\to 0$

Эквивалентные бесконечно малые

Теорема о замене бесконечно малой на эквивалентную

Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой

$\alpha(x) \sim \alpha'(x)$, при $x \to x_0$
$\beta(x) \sim \beta'(x)$, при $x \to x_0$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$$

Эквивалентные бесконечно малые

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,6x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{3}=2$$

sin x ~ x, при $x\to 0\Rightarrow$ sin 3x ~3 x, при $3x\to 0$

tg x ~ x, при $x\to 0\Rightarrow$ tg 6x ~ 6x, при $6x\to 0$

Таблица эквивалентности

1) $\sin x \sim x, x \to 0$

3) $\arcsin x \sim x, x \to 0$

5) $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \to 0$

7) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, x \to 0$

9) $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e, x \to 0$

2) $tgx \sim x, x \to 0$

4) $arctgx \sim x, x \to 0$

6) $e^x - 1 \sim x, x \to 0$

8) $\ln(1+x) \sim x, x \to 0$

10) $(1+x)^{k-1} \sim kx, k > 0, x \to 0$

11) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}, x \to 0$

Определение непрерывности функции y=f(x) в точке x0

Определение 1

Функция y=f(x) называется непрерывной в точке x_0 , если:

1. эта функция определена в точке x_0 и ее окрестности ;
2. существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)$ $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Определение 2

приращение аргумента

$$x - x_0 = \Delta x$$

приращение функции

$$f(x) - f(x_0) = \Delta y$$

Функция y=f(x) называется непрерывной в точке x_0 , если:

1. эта функция определена в точке x_0 и ее окрестности ;
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Определение непрерывности функции y=f(x)на интервале (a,b)

Определение

Функция y=f(x) называется непрерывной на интервале (a,b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала

Элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены

C – постоянная

x^{α} - степенная

a^{x} - показательная

$\log_a x$ - логарифмическая

тригонометрические

$\sin x$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\arccos x$
tgx	$arctgx$
$ctgx$	$arcctgx$

Точки разрыва функции

Определение

Точка x=x0 называется точкой разрыва функции y=f(x),
если в ней не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности функции

Точки разрыва

I рода

II рода

точки устранимого разрыва

точки скачка

Точки разрыва

Определение 1

Точка $x=x_0$ называется точкой разрыва функции $y=f(x)$ I рода, если существуют конечные пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

причем не все 3 числа $f(x_0), f(x_0-0), f(x_0+0)$ равны между собой

Определение 2

Точка $x=x_0$ называется точкой разрыва функции $y=f(x)$ II рода, если по крайней мере один из односторонних пределов в этой точке

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

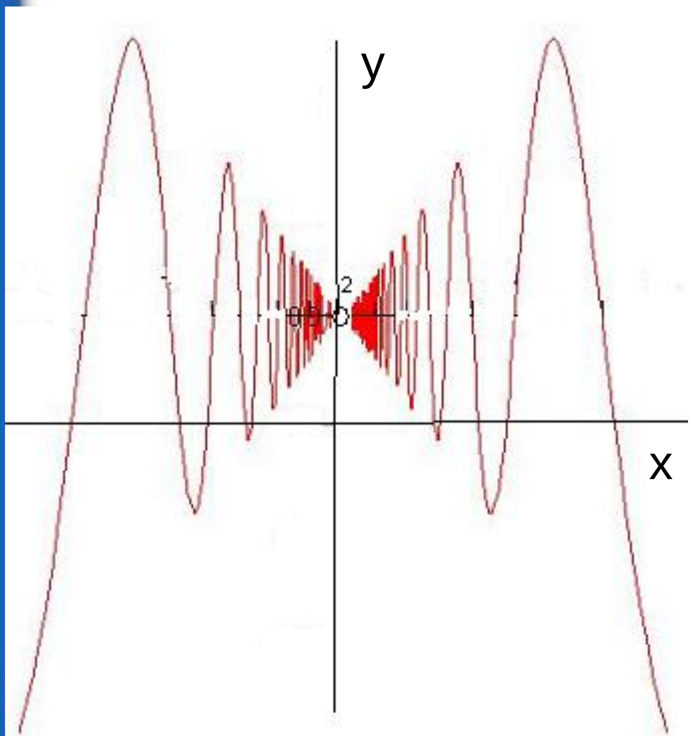
не существует или равен ∞

Точки устранимого разрыва

Точка $x=x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $y=f(x)$, если существуют конечные пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

причем $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$



Функция $y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0 \\ 2, x=0 \end{cases}$ имеет устранимый разрыв в точке 0

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$f(0)=2$$

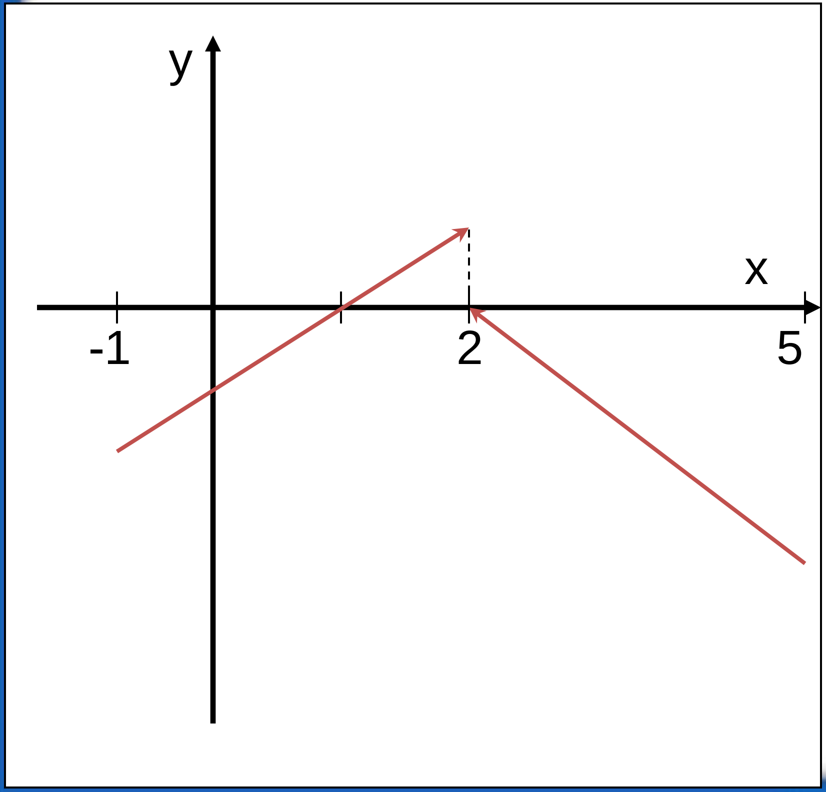
$$f(0-0)=f(0+0)\neq f(0)$$

Точки скачка

Точка $x=x_0$ называется точкой скачка функции $y=f(x)$,если существуют конечные пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\,, \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

причем $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, где $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ - скачок функции $y=f(x)$ в точке x_0



Функция $y=\begin{cases} x-1, -1\le x<2 \\ 2-x, 2\le x\le 5 \end{cases}$ имеет скачок в точке 2

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=0$$

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} f(x)=1$$

$$f(2)=0$$

$$f(2-0)\neq f(2+0)$$

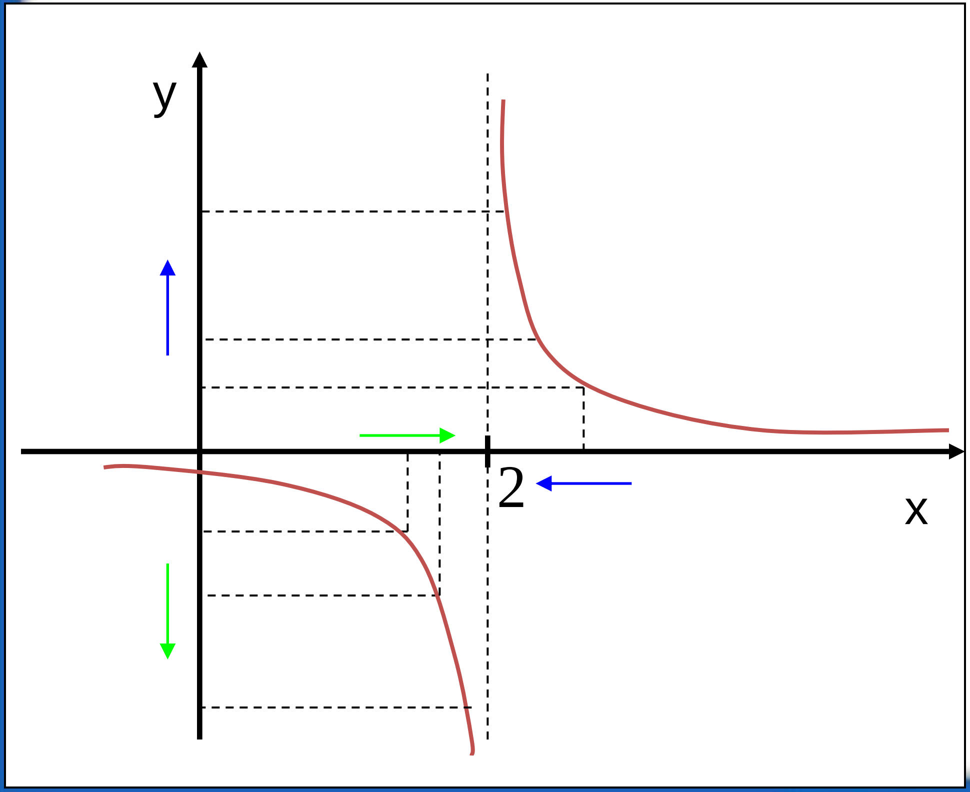
$f(2+0)-f(2-0)=1$ - скачок

Точки разрыва II рода

Точка $x=x_0$ называется точкой разрыва функции $y=f(x)$ II рода, если по крайней мере один из односторонних пределов в этой точке

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

не существует или равен ∞



Функция $y=\dfrac{1}{x-2}$ имеет разрыв II рода в точке 2

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty$$

Свойства непрерывных функций

y=f(x);   y=g(x)
непрерывные
функции в точке x0

$$y = f(x) + g(x),$$
непрерывная
функция в точке x0

$$y = f(x)g(x)$$
непрерывная
функция в точке x0

$$y = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x_0) \neq 0$$
непрерывная
функция в точке x0

Вопросы

- Числовая последовательность и ее предел.
- Предел функции в точке: определение по Гейне, по Коши.
- Односторонние пределы.
- Бесконечные пределы.
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства.
- Теорема о связи между функцией и ее пределом.
- Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.
- Сравнение бесконечно малых функций.
- Свойства бесконечно малых функций.
- Основные теоремы о пределах: о пределе постоянной, о единственности предела, о локальной ограниченности, о локальном повторении функцией свойств предела, об арифметике, о промежуточной функции, о пределе монотонной ограниченной функции.
- Замечательные пределы.

Техника вычисления пределов

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+4}{x^2+3}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin 2x\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{9-x}}{x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+5}{7x^2+8x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-4x+2}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 7x}{4x}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{7x}$